

Title	一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, I
Author(s)	福原, 満洲雄
Citation	全国紙上数学談話会. 58 p.1-p.6
Issue Date	1935-09-20
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74123">https://doi.org/10.18910/74123</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

# 201. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, I

福原満洲雄 (北大)

1. 今迄數面ニ亘ツテ

$$(a) \quad y \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)$$

ヲ論ジタガ、總テノ場合ヲ盡シタワケデナク、報告スベキ結果モ残ツテキルガ纏メル、ガ面倒デソノマヽニナツテキル、又佐藤徳意氏ハ

$$y \frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

ノ場合ヲ論シ、次第ニ (a) ノ場合ト同様ニ結果ヲ得ツツアル、此等モ近イ中ニ報告スル積リデアアル、此ノ特殊ノ場合ノ研究カラ一般ノ場合ヘ進ムニハドウイフ方針ヲ取ルカ、其ノ一例ヲコヽニ述ベヨウ。尚今後「 $y \frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)$ ニ就テ」ノ第九回ノモノヲ引用スル時ニハ  $[A_n]$  デ示ス。

2.  $[A_1]$  ノ場合ニハ (a) ヲ形式的ニ満足スル級數

$$(a) \quad y \sim x^p \left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_j}{x^j} + \dots \right\}$$

ヲ作ルト、 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  ハ常數トシテキマルガ、 $\alpha_{n+1}$  ハサウ行カナイ、ソコデ

$$(1) \quad y = x^p \left\{ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{Z}{x^{n+1}} \right\}, \quad x = \frac{1}{t}$$

ト置イテ  $(t, z) =$  関スル方程式ヲ

$$(b) \quad -t(\alpha_0 + \dots + \alpha_n t^n + z t^{n+1}) \frac{dz}{dt} \\ = C(t) + D(t)z + E(t)z^2$$

ト書ケバ,  $C(t), D(t), E(t)$  ハ

$$\begin{cases} C(t) \sim C_0 + C_1 t + \dots \\ D(t) \sim d_1 t + \dots \\ E(t) \sim \frac{n+1}{2} t^{n+1} + \dots \end{cases}$$

ナル形 = 展開サレル、コレガ

$$(p) \quad z \sim \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_j t^j + \dots \\ (\beta_j \text{ ハ } p \log t + C \text{ ノ整多項式})$$

ナル形 = 展開サレル解ヲ持ツコトカラ (a) が (α) ナル形 = 展開サレル解ヲ持ツコトが結論サレル、但

$$\beta = \frac{n+1}{2}, \quad \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{2b-n}{n+1}},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ハ常数

$\alpha_{n+1}, \dots$  ハ  $p \log x - C$  ノ整多項式

ナル  $([A_i])$  デ使ツタ記号ヲソノママ説明 + シ = 使ツタ).

方程式 (b) ヲ

$$(E) \quad t \frac{dz}{dt} = g(t, z)$$

ナル形 = 書イテ  $g(t, z)$  ヲ  $z$  ノ冪デ展開シタモノヲ

$$(g) \quad g(t, z) = g_0(t) + g_1(t)z + \dots + g_m(t)z^m + \dots$$

ト書ケバ  $g_m(t)$  ハ  $t \rightarrow +0$  ノ時

$$(g_m) \quad g_m(t) \sim g_m^{(0)} + g_m^{(1)} t + \dots + g_m^{(j)} t^j + \dots$$

ナル形 = 展開サレ、而モ  $\lambda = n+1$  ト置ケバ

$$(2) \quad a_m^{(0)} = -p, \quad a_1^{(0)} = 0, \quad a_m^{(j)} = 0 \quad (j < (m-1)\lambda)$$

トナツテキルコト、及ビ  $(g)$  が  $0 < t < \delta$ ,  $|z| t^\lambda < \zeta$  ナル範囲デ収斂デ、其ノ上各項 =  $x^\lambda$  ヲ掛ケレバ其ノ収斂性が一樣トナルコトが分ル、故 = 一般 =

I.  $(g)$  ハ  $0 < t < \delta$ ,  $|z| t^\lambda < \zeta$  ナル範囲デ収斂デ、各項 =  $x^\lambda$  ヲ掛ケレバ其ノ収斂性が一樣 = ナルトスル、又

$g_m(t)$  ハ  $(g_m)$  ナル形 = 近似的 = 展開サレ且ツ (2) ヲ假定スル、其ノ時任意ノ  $C$  ノ値 = 對シテ  $(\beta)$  ナル形 = 展開サレル (B) ノ解ハ存在シ、而モ唯一ツ = 限ル、

コトが想像サレ、實際 = 存在定理、單獨條件ヲ驅使スルコト = ヨツテ証明サレル。

(3) 併シソレダケデ満足スルワケ = ハ行カナイ、 $(\beta)$  ナル形 = 展開サレナイ解ハドウナルカ、 $[A_1]$  ノ場合 = ツイテ言ヘバ  $(\alpha)$  ナル形 = 展開サレナイ解ハ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x^{-p} y - \alpha_0| \geq 2|\alpha_0|$$

ヲ満足スル、コレヲ  $(t, z)$  = 關スル關係 = 直スト

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{-\lambda} |z| \geq 2|\alpha_0|$$

トナル、實際 = 私ガ証明シタ時 = ハ後者カヲ前者ヲ導イタノデアル、故 = 一般ノ假定 = 戻ツテモ

II. 適當ノ正ノ數  $\varepsilon$ ヲ取レバ  $(\beta)$  ナル形ニ展開サレナイ  
解ハ  $(0 < t < \delta)$  デ存在スル時)

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{-\lambda} |z| \geq \varepsilon$$

ヲ満足スル。

ト言ヘナイデアヲウカ、ソコデ  $(B)$  ノ解ヲ

$$\frac{A}{x^\lambda + Mx_0^\lambda} - B \frac{x^\mu}{x_0^\lambda} \quad (0 < \mu < 1)$$

ナル函數ト比較シテ見ルト肯定的ナ答ヘヲ得ル。以上ノ結果  
ヲ複素領域ニ拡張スルコトモ容易デアル、コレダケデ我々ノ  
目的ニハ十分ノマウニ思ハレル。

(4) 與ヘラレタ假定ノ下ニ  $(\beta)$  ナル形ノ近似展開ヲ許ス  
解ノ存在及ビ單獨性ヲ証明スルコトハ、此ノ種ノ論法ニナレ  
タ者ニトツテハ難事デナイ。併シ I ダケデナク II マデ予想ス  
ルコトが出来ルノハ己ニ簡單ナル例ヲ解イテキルカラデアアル、  
ケレドモ II モ亦ソレ程予想ニ困難デアルトハ思ハレナイ、己  
ニ解カレタ實例ガモット重要ナ役割ヲ演ジテキルノハ  $g(x, z)$   
ニ對シテドウイフ假定ヲ設ケルカトイフ點ニ於イテデアアル。  
I デ述べタ假定ハ、 $2m+1 < n$  ノ場合ノ  $(a) [A_1]$  ニ關ス  
ル結果ヲ知ツテ居レバコソ、自然ニ設ケラレタノデアアルガ、  
ソレナシニ何処カラサウイフ條件ヲ持チ出シア來ラレルダラ  
ウカ。若シ  $(B)$  ガ  $(\beta)$  ナル形ノ近似展開ヲ許ス解ヲ持ツトイ  
フコトダケヲ目標トスルナラバ、モット緩イ假定デ十分デア

ル、併シソレデハ我々が必要トスルⅡハ得ラレナイ、ソシテ此ノⅡが必要デアルコトハ實例ニヨツテ知り得タ所ナノデア  
ル。

然ラバ上ニ述ベタ場合ニ歸着サレル方程式ハドンナ形ヲ持ツカ、コレニ関シテハ一般ニ *reduction* ノ問題ノ時ニ触レルコトニシヨウ。

(5) コノヤウニシテ簡單ナ實例カラ出発シテ一般ノ理論建設ヘノ方針が指示サレル。今迄佐藤氏ト私が取扱ツタ例ハ甚ダ簡單デハアルが、ソノ結果カラ推シテ予想定理が正シイコトハ殆ンド確實ノヤウデアル。時ニ思ヒガケナイ事實ニ出遭フコトモナイデハナイが、大体ニ於テ予想通りニ事が運ンデ行ク。*Malmquist* ノ定理ノ擴張バカリデナク、一階ノ常微分方程式ヲ近似的ニ解ク(コノ言葉ノ意味ハ多少説明ヲ要スルが、ココデハ省略シテ置ク) トイフ問題が完全ニ解決サレルノハ近い中——ト言ツテモ余程順調ニ行ツタトシテ、即チ手問ノ問題ダケニナツタトシテモ半年×一年ハカカル——ダト思ツテ居ルノハ夢デラウカ。

ドンナ問題ヲ解クニシテモ、其ノ際道具が入用デアル、ソレガナカツタラ、ソレヲ作ツテカラ解決ニ乗出スノガ順序デアル、ソノ道具ヲ作ル準備期間ハ長クテ氣が焦ル、仕事ハ骨ガ折レル程ニ目立タナイ、微分方程式論ニ於イテ解ノ存在定理ハ基礎デアリ、研究ノ道具デアリ又同時ニ道具ヲ作り出ス源泉デモアル。併シ古典的ナ形ニ於ケル解ノ存在定理デハ

力不足デアル、ソレニ磨キヲカケル必要ガアツタ、今又此ノ  
道具ハ一階常微分方程式ノ近似的研究ニハ十分ノ程度ニ鍛ヘ  
ラレタト思ツテ、此ノ道具ノ効力ヲ試ミルタメ其ノ解決ヲ企  
テタ次第ナノデアル。永イ地下ノ仕事ノ後、日ノ目ヲ見タマ  
ウナ思ヒガスル。併シ二階又ハソレヨリ高イ微分方程式、或  
ハ偏微分方程式ヘ進ムニハ未ダ道具ガ不足デアル、再び此ノ  
苦シイ準備工作ニ移ラネバナルマイト思ツテホレ。